

Question 6: Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 et soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

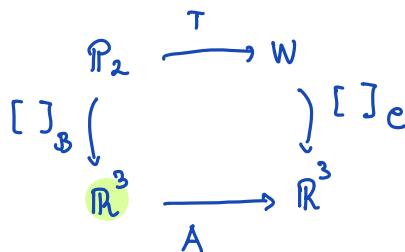
$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ b-c & a+b+c \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$B = (1, 1-t, t+t^2) \quad \text{et} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

des bases de $\mathbb{P}_2$ et W respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base B de $\mathbb{P}_2$ et la base C de W , telle que $[T(p)]_C = A[p]_B$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$A = \left([T(\vec{b}_1)]_C \quad [T(\vec{b}_2)]_C \quad [T(\vec{b}_3)]_C \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = c_1 + c_3$$

$$T(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = c_1 - c_2$$

$$T(\vec{b}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2c_3$$

à exprimer dans C .